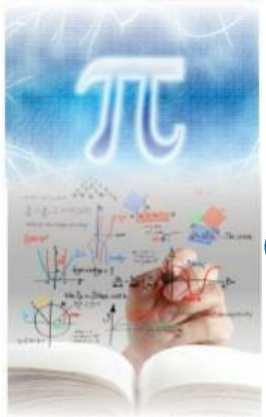
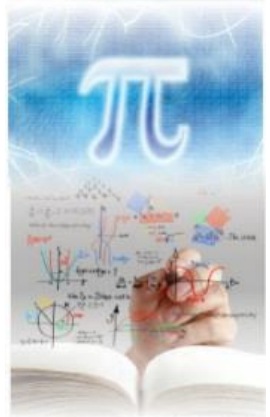
PITAGORAS
ACADEMIA

ÁLGEBRA

Profesor
Freddy Ávalos C

FUNCIONES EN LOS REALES





DEFINICION – DOMINIO Y RANGO

FUNCIONES

Función

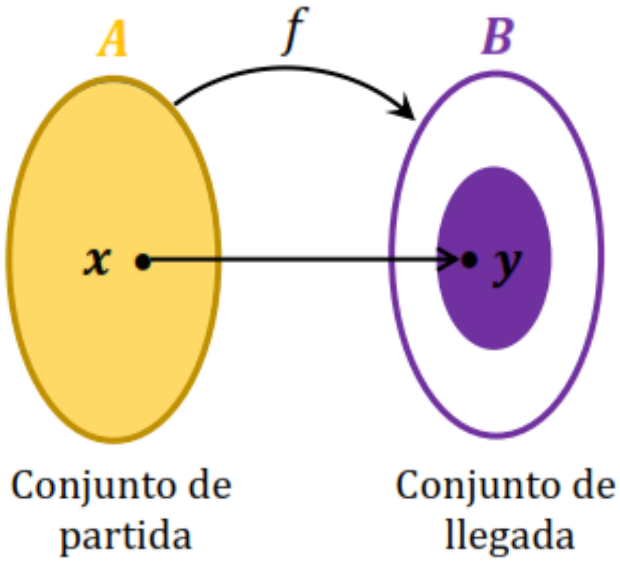
1. Definición

Sean A y B conjuntos no vacíos y el subconjunto f del producto cartesiano $A \times B$ ($f \subset A \times B$).
Se denomina función f de A en B si para todo par ordenado $(x; y) \in f$; a la primera componente x le corresponde una única segunda componente y.

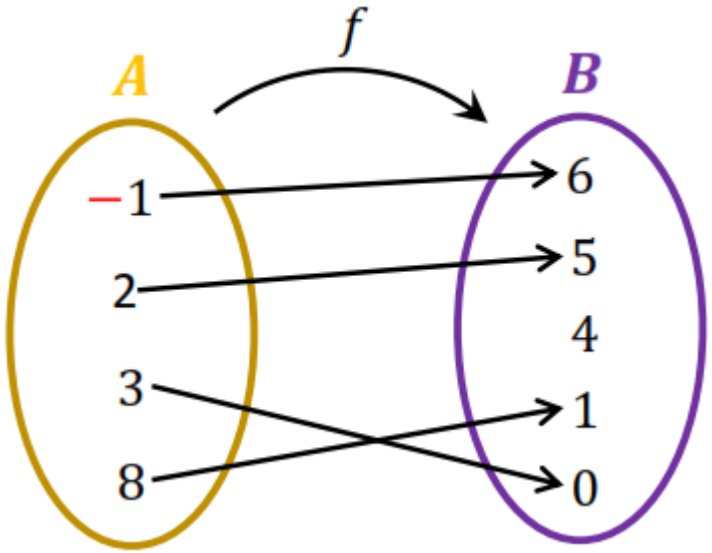
Notación:

$f: A \longrightarrow B$ $\qquad$ $A \xrightarrow{f} B$

Gráficamente



Ejemplo:



$$f = \{(-1; 6)\ ;\ (2; 5)\ ;\ (3; 0)\ ;\ (8; 1)\}$$

- **Dominio de f**: $\text{Dom}(f) = \{x\ /\ (x; y) \in f\}$

Es el conjunto formado por las primeras componentes.

$$\text{Dom}f = \{-1; 2; 3; 8\} = A$$

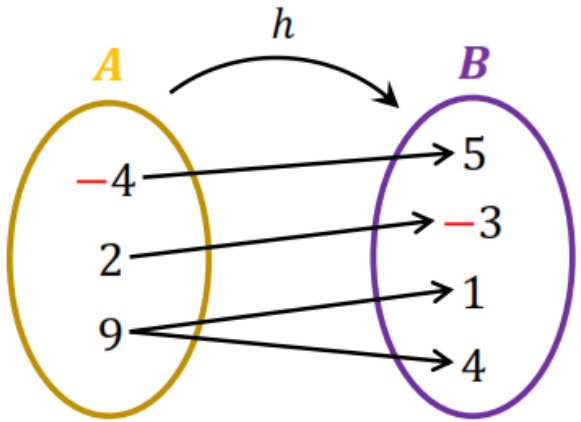
- **Rango de f**: $\text{Ran}(f) = \{y\ /\ (x; y) \in f\}$

Es el conjunto formado por las segundas componentes.

$$\text{Ran}f = \{6; 5; 1; 0\} \subseteq B$$

FUNCIONES

Nota:



¿h es función?

No , pues al elemento 9 de A le corresponde no uno, sino dos elementos de B (1 y 4)

2. Condición de unicidad de una función

Sea f una función.

$$\text{Si } (x;y) \in f \ \wedge \ (x;z) \in f \ \rightarrow \ y = z$$

Ejemplos:

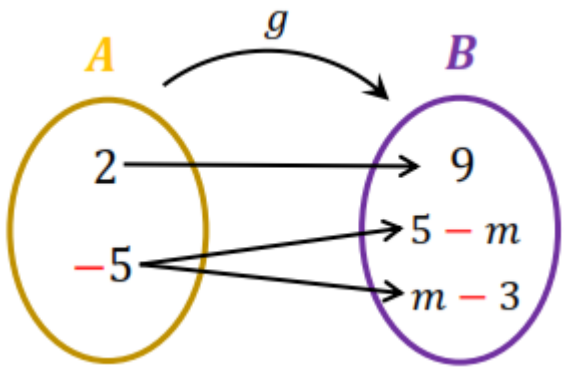
- Sea f una función

$$\text{Si } (8;n) \in f \ \wedge \ (8;7) \in f \ \rightarrow n = 7$$

- Sea h una función

$$h = \{(3;-5);(2;4);(3;p)\} \ \rightarrow \ p = -5$$

- Sea g una función



Como $(-5; m-3) \in g \ \wedge \ (-5; 5-m) \in g$

$$\rightarrow m - 3 = 5 - m \ \rightarrow \ m = 4$$

PITAGORAS ACADEMIA

FUNCIONES

3. Regla de correspondencia de una función

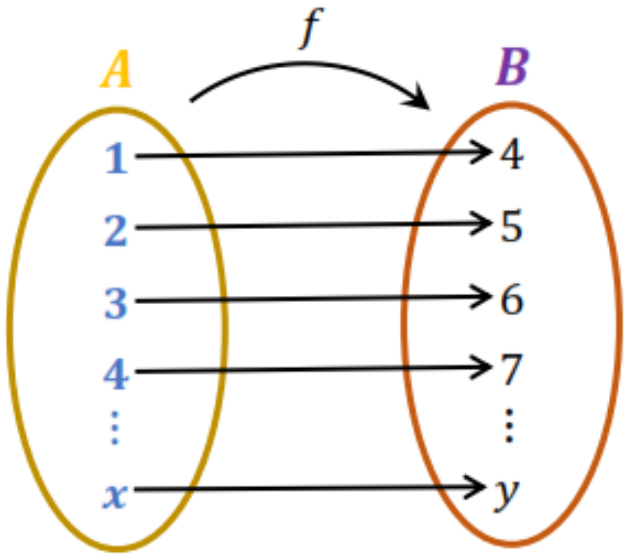
Sea $f: A \to B$ una función tal que $(x; y) \in f$. La regla de correspondencia de f es la ecuación que relaciona x e y.

Notación: $y = f(x)$

x: variable independiente

y: variable dependiente

Ejemplo:



$f(1) = 3 = 1 + 3$

$f(2) = 4 = 2 + 3$

$f(3) = 5 = 3 + 3$

$f(4) = 6 = 4 + 3$

⋮ ⋮

La relación entre x e y es: $y = f(x) = x + 3$

4. Función real de variable real

$f: A \to B$ es una función real de variable real, si A y B son subconjuntos de $\mathbb{R}$.

Ejemplos:

- $f: \langle -2; 7] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longrightarrow 3x - 5$

  De donde observamos que: $\text{Dom} f = \langle -2; 7] \ \wedge \ f(x) = 3x - 5$

De donde observamos que:

$\text{Dom} f = \langle -2; 7] \ \wedge \ f(x) = 3x - 5$

- $g = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / \ y = 6x^2 - 7 \wedge -2 < x \leq 3\}$

- $h(x) = \sqrt{6x - 3}; \ x \in [1; 4]$

Nota:

Una función está bien definida si se conoce su dominio y su regla de correspondencia.

Cálculo del dominio y rango de una función

1. Cálculo del dominio

Es el conjunto formado por todos los valores reales de x; tales que la regla de correspondencia obtenga valores reales.

Tenga en cuenta el C. V. A. (Conjunto de valores admisibles):

i. $\sqrt[\text{impar}]{a} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a \in \mathbb{R}$

ii. $\sqrt[\text{par}]{a} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a \geq 0$

iii. $\dfrac{P_{(x)}}{Q_{(x)}} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow Q_{(x)} \neq 0$

Nota:
Si tenemos solo la **regla de correspondencia** de una función, entonces:

$$\text{Dom}f = \text{C. V. A.}$$

Ejemplo:

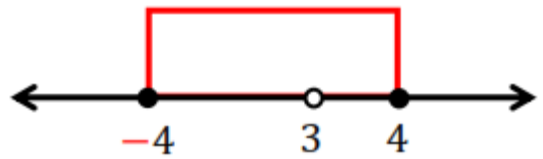
Calcule el dominio de $f(x) = \sqrt{16 - x^2} + \dfrac{2}{x-3}$

Resolución:

- $16 - x^2 \geq 0 \rightarrow 16 \geq x^2$
  $\rightarrow x^2 \leq 16$
  $\rightarrow \boxed{-4 \leq x \leq 4}$ ... (1)

- $x - 3 \neq 0 \rightarrow \boxed{x \neq 3}$ ... (2)

Finalmente, de (1) y (2)



$\therefore \text{Dom}f = [-4; 4] - \{3\}$

2. Cálculo del rango

Es el conjunto formado por todos los valores reales de y o $f_{(x)}$ y se obtiene (en general) a partir del dominio.

Ejemplo 1:

Halle el rango de la función $f(x) = 2 - \frac{10}{x+3}$; si $x \in \langle -3;7]$

Resolución: Como $x \in \langle -3;7]$

$$\rightarrow -3 < x \leq 7$$

$$\rightarrow 0 < x+3 \leq 10 \quad (+3)$$

$$\rightarrow \frac{1}{x+3} \geq \frac{1}{10} \quad \text{(invertimos)}$$

$$\rightarrow -\frac{10}{x+3} \leq -1 \quad (\times(-10))$$

$$\rightarrow \underbrace{2 - \frac{10}{x+3}}_{f(x)} \leq 1 \quad (+2)$$

$\therefore \text{Ran}f \in \langle -\infty;1]$

Ejemplo 2:

Halle el rango de $g(x) = (x-3)^2 + 7$; si $x \in \langle -2;5]$.

Resolución:

Como $x \in \langle -2;5] \rightarrow -2 < x \leq 5$

$$\rightarrow -5 < x-3 \leq 2 \quad (-3)$$

$$\rightarrow 0 \leq (x-3)^2 < 25 \quad (\ )^2$$

$$\rightarrow 7 \leq \underbrace{(x-3)^2 + 7}_{g(x)} < 32 \quad (+7)$$

$\therefore \text{Ran}g = [7;32\rangle$

FUNCIONES

Gráfica de una función

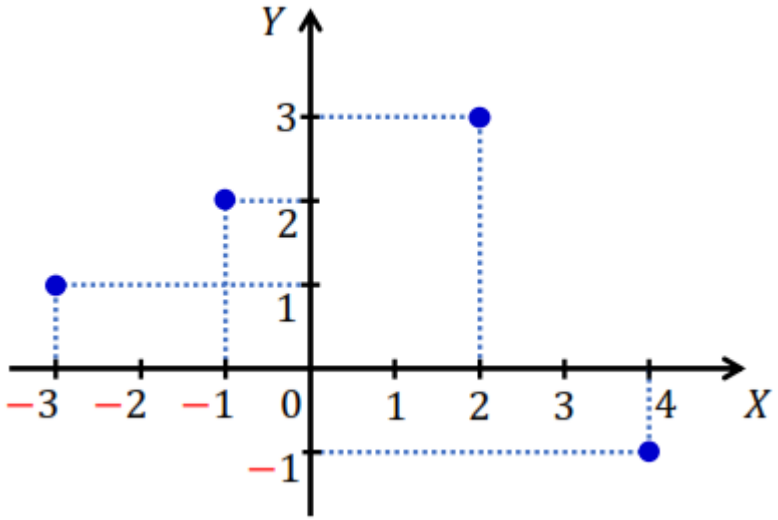
Definición

La gráfica de una función f es la representación de todos sus pares ordenados (x, y) en el plano cartesiano.

$$Graf(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \in \text{Dom} f \ \wedge \ y = f(x)\}$$

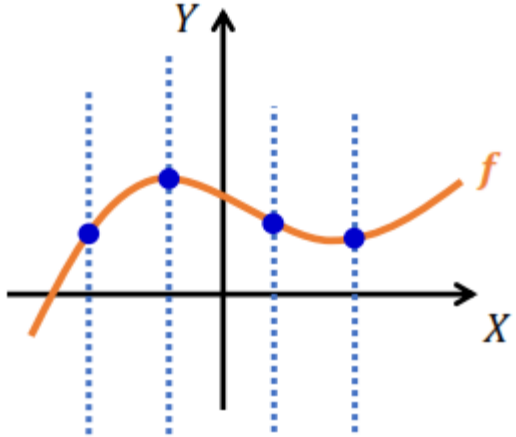
Ejemplo:

Grafique la función $f = \{(2; 3); (4; -1); (-1; 2); (-3; 1)\}$

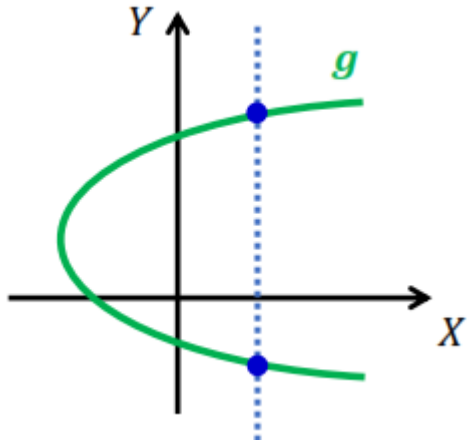


Propiedad

Una gráfica corresponde a una función, si al trazarle rectas verticales, estas la intersecan a lo más en un solo punto.

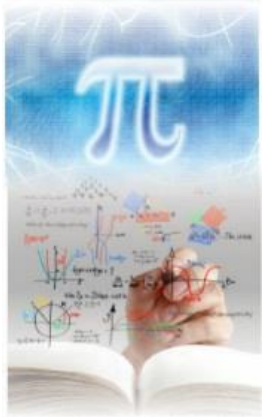


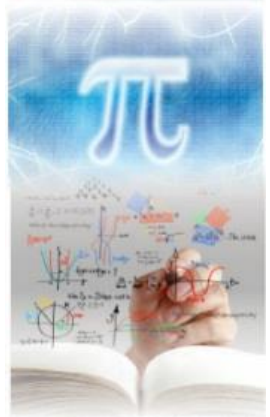
La gráfica de f sí corresponde a una función.



La gráfica de g no corresponde a una función.

MOMENTO DE PRACTICAR





PROBLEMAS Y RESOLUCIÓN

FUNCIONES

1. Si el conjunto
$f=\{(3;9),(a;7),(3;a^2),(b;-1),(5;b^2),(5;4b-3)\}$
representa una función, indique f.

A) $f=\{(3;9),(3;-3),(-1;-1),(5;1)\}$
B) $f=\{(3;9),(5;9)\}$
C) $f=\{(3;9),(3;7),(5;25),(5;1)\}$
D) $f=\{(3;9),(-3;7),(5;-1)\}$
E) $f=\{(3;9),(-3;7),(1;-1),(5;1)\}$

SOLUCION

Por teoría:

$a^2=9 \wedge b^2=4b-3$

$(a=3 \vee a=-3) \wedge b^2-4b+3=0$

$b \quad -3$
$b \quad -1$

$(b-3)(b-1)=0$

$b=3 \vee b=1$

$\therefore f=\{(3;9);(-3;7);(1;-1);(5;1)\}$

CLAVE (E)

2. Se sabe que f es una función, tal que

$$f_{(x)} = \begin{cases} 2x-1; 0 \le x < 3 \\ 2; 3 \le x \le 10 \end{cases}$$

además

$$f_{\left(\frac{m^2}{2}\right)} - f_{(2m+5)} = f_{(1)}; -1 < m \le 2$$

calcule $f_{(m)}$.

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 5

SOLUCION

$-1 < m \le 2$ ..... (α)

$f\left(\frac{m^2}{2}\right) = ??$

De (α): $0 \le m^2 \le 4$

$0 \le \frac{m^2}{2} \le 2 \rightarrow f\left(\frac{m^2}{2}\right) = 2\left(\frac{m^2}{2}\right) - 1 = m^2 - 1$

$f(2m+5) = ??$

De (α) $-2 < 2m \le 4$

$3 < 2m+5 \le 9 \rightarrow f(2m+5) = 2$

$f(1) = 2(1) - 1 = 1$

En el dato:

$m^2 - 1 - 2 = 1 \rightarrow m^2 = 4 \rightarrow m = 2 \vee m = -2 \rightarrow \boxed{m = 2}$

So $f(m) = f(2) = 2(2) - 1 = 3$ CLAVE D

3. Determine el dominio de la función

$$f_{(x)} = \sqrt{\frac{9}{x^2} - 1}$$

A) $[-3; 3]$
B) $[-3; 3] - \{0\}$
C) $\langle -\infty; -3] \cup [3; +\infty\rangle$
D) $[-2; 2]$
E) $[-2; 2] - \{0\}$

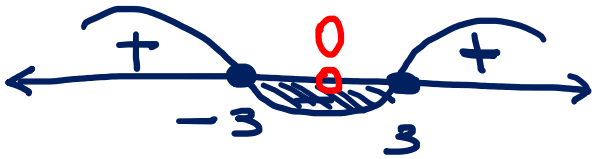
SOLUCION

$$Dom(f) = \left\{x / \frac{9}{x^2} - 1 \geq 0\right\}$$

$$\frac{9 - x^2}{x^2} \geq 0$$

$$\rightarrow \frac{x^2 - 9}{x^2} \leq 0$$

$$(x+3)(x-3) \leq 0 \wedge x \neq 0$$



$$\therefore D_f = [-3;3] - \{0\}$$ CLAVE (B)

4. Sea la función

$h: \langle a; b\rangle \rightarrow \mathbb{R}$

$x \rightarrow 2x+5$

cuyo rango es $\langle 3; 9\rangle$. Determine el valor de $a+b$.

A) 0 B) 1 C) −1
D) −2 E) 2

SOLUCION

$h(x) = 2x+5 \; ; \; x \in \langle a;b\rangle$

además $R_h = \langle 3;9\rangle$

Por dato: $3 < \underbrace{y}_{h(x)} < 9$

$3 < 2x+5 < 9$

$-5: \; -2 < 2x < 4$

$\times \frac{1}{2}: \; -1 < x < 2$

$\rightarrow D_h = \langle -1;2\rangle = \langle a;b\rangle$ (dato)

$a = -1 \; ; \; b = 2$

$\therefore a+b = 1$ Clave (B)

5. Halle el rango de la función

$$g_{(x)} = \frac{x+1}{3x+2}; -\frac{1}{3} \leq x \leq 4$$

A) $\left\langle \frac{15}{42}; \frac{2}{3} \right\rangle$ B) $[2; 15]$ C) $\langle -1; -1/2 \rangle$

D) $\left[\frac{15}{42}; \frac{2}{3} \right]$ E) $\left[\frac{15}{42}; 2 \right]$

SOLUCION

$$g(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{3x+3\times 1}{3x+2}\right)$$

$$g(x) = \frac{1}{3}\left[\frac{3x+2+1}{3x+2}\right]$$

$$g(x) = \frac{1}{3}\left[1 + \frac{1}{3x+2}\right]$$

Dato: $-\frac{1}{3} \leq x \leq 4$

por 3: $-1 \leq 3x \leq 12$

+2: $1 \leq 3x+2 \leq 14$

invertir: $1 \geq \frac{1}{3x+2} \geq \frac{1}{14}$

+1: $2 \geq 1 + \frac{1}{3x+2} \geq \frac{15}{14}$

$\times \frac{1}{3}$: $\frac{2}{3} \geq \underbrace{\frac{2}{3}\left[1 + \frac{1}{3x+2}\right]}_{g(x)} \geq \frac{15}{42}$

$\therefore R_g = \left[\frac{15}{42}; \frac{2}{3}\right]$ (D)

FUNCIONES

6. Sea $f: S \to \mathbb{R}$ una función definida por
$f=\{(2t+1;\ 4t^2-2t+1) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} / t \in \mathbb{R}\}$
Halle la regla de correspondencia de f.

A) $f_{(x)}=x^2-x+1$
B) $f_{(x)}=x^2-2x+3$
C) $f_{(x)}=x^2+3x+3$
D) $f_{(x)}=x^2+3x-3$
E) $f_{(x)}=x^2-3x+3$

$4t^2=(2t)^2$

SOLUCION

NOTACIÓN: $f=\{(x; f(x)) : \forall x \in A\times B / x \in A\}$

Sea: $2t+1=x \to 2t=x-1$

$y=(x-1)^2-(x-1)+1$

$y=x^2-2x+1-x+2$

$y=x^2-3x+3$ ✓

$\therefore f(x)=x^2-3x+3$ CLAVE (E)

FUNCIONES

7. Dado el conjunto $A=\{-2; 2; 3; 4\}$ y las funciones $f=A \to A$ y g, tales que $f=\{(2; 3), (a; 2), (3; 4), (4; -2)\}$ y $g_{(x)}=mx+n$. Además $f_{(2)}=g_{(3)}$ y $f_{(3)}=g_{(2)}$. Evalúe $g_{(a)}$.

A) -1 B) 3 C) 5
D) 8 E) 10

$f: A \to A$
Dom f

SOLUCION

Dato: $Dom(f) = A = \{-2; 2; 3; 4\}$

$\{2; a; 3; 4\} = \{-2; 2; 3; 4\} \to \boxed{a = -2}$ ✓

Además: $g(x) = mx + n$

$g(3) = 3m + n = 3$

$g(2) = 2m + n = 4$

$m = -1;\ n = 6$

Luego:

$g(x) = -x + 6$

Se pide: $g(a) = g(-2) = -(-2) + 6 = 8$

CLAVE D

8. Sea f una función, tal que

$$f_{(x)} = \begin{cases} x + f_{(1)}; x < 0 & \text{....(1)} \\ x - f_{(0)}; x \geq 0 & \text{....(2)} \end{cases}$$

calcule $\sum_{k=-5}^{5} f_{(k)}$

A) 0 B) 10 C) 5
D) −5 E) −1

SOLUCION

$S = f(-5) + f(-4) + f(-3) + \ldots + f(3) + f(4) + f(5)$

en (2): $x=0$: $f(0) = 0 - f(0) \rightarrow f(0) = 0$ ✓

$\rightarrow f(x) = x \; ; \; x \geq 0$

$x=1 \rightarrow f(1) = 1$; luego: $f(x) = x+1 \; ; \; x < 0$

$$f(x) = \begin{cases} x+1 ; & x < 0 \\ x ; & x \geq 0 \end{cases}$$

en S:

$S = -4 - 3 - 2 - 1 + 0 + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5$

$\therefore S = 5$ / CLAVE (C)

FUNCIONES

9. Sea el conjunto $A=\{x \in \mathbb{R}/x^3+2x^2=-x\}$
Determine el número total de funciones
$f: A \to A$.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 6

SOLUCION

Cálculo de A:

$x^3+2x^2+x=0$

$x(x^2+2x+1)=0$

$x(x+1)^2=0 \rightarrow x=0 \vee x=-1$

$\Rightarrow A=\{0;-1\}$; $A=\{0;-1\}=D_f$

$A \times A=\{(0;0);(0;-1);(-1;0);(-1;-1)\}$

$f: A \to A$

$f=\{(0;0);(-1;0),\}$ $f=\{(0;-1);(-1;0)\}$

$f=\{(0;-1);(-1;-1)\}$

$f=\{(0;0);(-1;-1)\}$ CUMPLE D

FUNCIONES

10. Dada la función
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de modo que
$f_{(x)} = mx;\ \forall\ x \in \mathbb{R}$
Indique el valor de verdad de las proposiciones.

I. $f_{(\alpha x)} = \alpha f_{(x)}$

II. $f_{(\alpha x+\beta y)} = \alpha f_{(x)} + \beta f_{(y)}$

III. $f_{(x-y)} = f_{(x)} - f_{(y)}$

IV. $f_{(-x)} = -f_{(x)}$

A) VVVF B) VFVF C) VVFF
D) VVVV E) VFVV

SOLUCION $f(x) = mx;\ \forall x \in \mathbb{R}$

I) $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ (V)

$f(\alpha x) = m(\alpha x) = m\alpha x = \alpha(mx) = \alpha f(x)$

II) $f(\alpha x+\beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$ (V)

$f(\alpha x+\beta y) = m(\alpha x+\beta y) = \alpha(mx) + \beta(my) = \alpha f(x)+\beta f(y)$

III) $f(x-y) = f(x) - f(y)$

$f(x-y) = m(x-y) = mx - my = f(x) - f(y)$ (V)

IV) $f(-x) = -f(x)$

$f(-x) = m(-x) = -mx = -f(x)$ (V)

= VVVV

CLAVE D

11. Sea

$$f_{(x)} = \sqrt{\frac{12+x-x^2}{|2x-5|}}$$

Indique la suma de los valores enteros del dominio de $f_{(x)}$.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

SOLUCION

$$Dom(f) = \left\{ x / \frac{12+x-x^2}{\underbrace{|2x-5|}_{(+)}} \geq 0 \right\}$$

$$\rightarrow 12+x-x^2 \geq 0 \wedge x \neq \frac{5}{2}$$

$$x^2-x-12 \leq 0$$

$$x \quad x \quad -4 \quad 3$$

$$(x-4)(x+3) \leq 0 \wedge x \neq \frac{5}{2}$$

$$\rightarrow Df = [-3;4] - \left\{ \frac{5}{2} \right\}$$

$$x \in Z = -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4$$

$$\Sigma(x \in Z) = 4$$

CLAVE (D)

12. Determine el rango de $f_{(x)}$.

$$f_{(x)}=\begin{cases}2x-2f_{(x)}; x\geq 1\\ 4xf_{(x)}-4x+1; x<1; x\neq\frac{1}{4}\end{cases}$$

A) $\left[\frac{1}{3};+\infty\right\rangle$ B) $\left[\frac{2}{3};+\infty\right\rangle$ C) $\left[\frac{4}{3};+\infty\right\rangle$

D) $\left[\frac{5}{3};+\infty\right\rangle$ E) $\left[\frac{7}{3};+\infty\right\rangle$

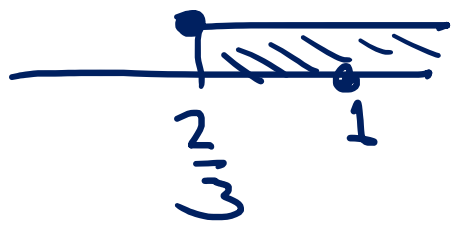
$$f(x)=\begin{cases}\frac{2}{3}x; x\geq 1\\ 1; x<1\wedge x\neq\frac{1}{4}\end{cases}$$

$x\geq 1 \rightarrow \underbrace{\frac{2}{3}x}_{f_1(x)}\geq\frac{2}{3} \rightarrow \boxed{y_1\geq\frac{2}{3}}$

$x<1\wedge x\neq 4 \rightarrow \boxed{y_2=1}$

SOLUCION

Redefiniendo a "f"



① $f(x)=2x-2f(x)\ ;\ x\geq 1$

$3f(x)=2x \rightarrow \underline{f(x)=\frac{2x}{3}\ ;\ x\geq 1}$

② $f(x)=4xf(x)-4x+1\ ;\ x<1\wedge x\neq\frac{1}{4}$

$(1-4x)f(x)=1-4x \rightarrow \underline{f(x)=1}$

finalmente: $R_f=y_1\cup y_2$

$\therefore R_f=\left[\frac{2}{3};+\infty\right)$

clave B

13. Determine el dominio de la función

$$g_{(x)} = \sqrt{x^3 - 2x^2 - x - 6} + 5$$

A) $[3; +\infty\rangle$
B) $\langle -\infty; 3]$
C) $\langle -\infty; -1] \cup [1; 3]$
D) $[-1; 1] \cup [3; +\infty\rangle$
E) $\langle 4; +\infty\rangle$

SOLUCION

$$D_g = \{x / x^3 - 2x^2 - x - 6 \geq 0\}$$

	1	−2	−1	−6
3	↓	3	3	6
	1	1	2	0

$$(x-3)(x^2 + x + 2) \geq 0$$

$$\Delta < 0$$

$$x - 3 \geq 0$$

$$x \geq 3$$

$$\therefore D_g = [3; +\infty\rangle \quad \text{CLAVE A}$$

14. Indique el dominio de la función

$$f_{(x)} = \sqrt{1+x+x^2+x^3} + \sqrt{x-\frac{1}{x}}$$

A) $[-1; +\infty\rangle$
B) $[-1; 1]-\{0\}$
C) $\{-1; 1\}$
D) $[-1; +\infty\rangle-[0; 1]$
E) $[-1; +\infty\rangle-[0; 1\rangle$

SOLUCION

$$Dom(f) = \{x / \ 1+x+x^2+x^3 \geq 0 \ \wedge \ x-\frac{1}{x} \geq 0\}$$

$$(1+x) + x^2(1+x) \geq 0 \ \wedge \ \frac{x^2-1}{x} \geq 0$$

$$(x+1)(x^2+1) \geq 0 \ \wedge \ \frac{(x+1)(x-1)}{x} \geq 0$$

$\Delta < 0$

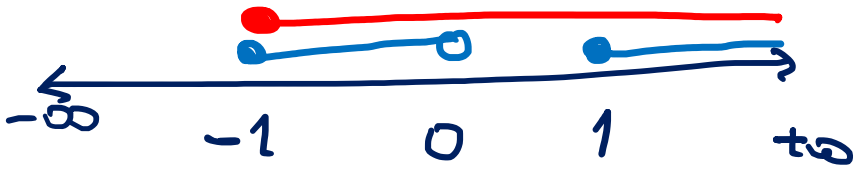
$x+1 \geq 0$

$x \geq -1$ (1)

$\wedge$

$-1 \leq x < 0 \ \vee \ x \geq 1$ (2)

Intersectando



$$D_f = [-1; 0\rangle \cup [1; +\infty\rangle = [-1; +\infty\rangle - [0; 1\rangle$$

CLAVE E

15. Halle el rango de la función

$$f=\left\{\left(\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t};1-\cos^2 t\right)/t\in\mathbb{R}\right\}$$

A) Ran$f=[-1;1]$
B) Ran$f=[0;2]$
C) Ran$f=[-2;0]$
D) Ran$f=[0;\sqrt{2}]$
E) Ran$f=[0;1]$

SOLUCION

$1-\operatorname{Sen}^2 t=\operatorname{Cos}^2 t$

$f=\{(\sqrt{\operatorname{Cos}^2 t}\ ;1-\operatorname{Cos}^2 t)/\ t\in\mathbb{R}\}$

$f=\{(|\operatorname{Cos} t|;\ 1-\operatorname{Cos}^2 t)/\ t\in\mathbb{R}$

Sea: $x=|\operatorname{Cos} t|$; se sabe: $\operatorname{Cos}^2 t=|\operatorname{Cos} t|^2$

$t\in\mathbb{R}\rightarrow -1\leq \operatorname{Cos} t\leq 1\rightarrow 0\leq \underbrace{|\operatorname{Cos} t|}_{x}\leq 1$

$\rightarrow f(x)=1-x^2;\quad 0\leq x\leq 1$

$0\leq x^2\leq 1$

$0\geq -x^2\geq -1$

$1\geq \underbrace{1-x^2}_{f(x)}\geq 0$

$\therefore Rf=[0;1]$ CLAVE (E)

FUNCIONES

16. Si $f_{(x)} = \dfrac{2x^2 - 2x + 3}{2x^2 - 2x + 2}$,

tal que $|f_{(x)}| \leq k$, $\forall\, x \in \text{Dom}(f)$
determine el menor valor de k.

A) 2/3 B) 5/3 C) 7/3
D) 8/3 E) 3

SOLUCION

FUNCIONES

17. Dada la función

$$f_{(x)} = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$$

y sean $x_0 \notin \text{Dom}f \wedge y_0 \notin \text{Ran}f$.
calcule el valor de $(x_0 + y_0)$

A) -1 B) 0 C) 2
D) 5 E) 7

SOLUCION

18. Sea f una función definida por

$$f=\left\{\left(\frac{e^{t}-e^{-t}}{2};\frac{e^{t}+e^{-t}}{2}\right)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\,/\,t\in\mathbb{R}\right\}$$

Determine la regla de correspondencia de f.

SOLUCION

A) $f_{(x)}=\sqrt{1+x^{2}}$

B) $f_{(x)}=-\sqrt{1+x^{2}}$

C) $f_{(x)}=\sqrt{1-x^{2}}$

D) $f_{(x)}=-\sqrt{1-x^{2}}$

E) $f_{(x)}=\sqrt{1+x}$

FIN DE LA SESIÓN

PRACTICA Y APRENDERÁS